РАЗДЕЛ 4

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ИНФОРМАТИЗАЦИЯ В УПРАВЛЕНИИ СЛОЖНЫМИ СИСТЕМАМИ

УДК 330.4 (075)

В. Р. Абдуллин,
Р. З. Абдуллин

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРА ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ СОЛОУ С УЧЕТОМ ЗАПАЗДЫВАНИЯ ОСВОЕНИЯ ИНВЕСТИЦИЙ

В работе предложена модификация модели экономической роста Солоу с дискретным временем. Модификация заключается в учете запаздывания в освоении инвестиций путем формирования инвестиций текущего периода из валового внутреннего продукта, текущего и предыдущего периодов. Эта модель содержит как частный случай дискретный вариант модели Солоу. Построенная модель в удельных показателях включает нелинейное разностное уравнение для фондовооруженности. Установлены условия на параметры модифицированной модели, обеспечивающие наличие единственного ненулевого стационарного решения этого уравнения. Аналитически доказано, что при выполнении этих условий стационарное решение является притягивающим. Стационарное решение и удельные характеристики модифицированной модели меньше стационарного решения и удельных характеристик дискретной модели Солоу.

Ключевые слова: математическая модель, экономическая динамика, дискретная модель Солоу, структура инвестиций, нелинейное разностное уравнение, стационарное решение, притяжение стационарного решения.

V. R. Abdullin,
R. Z. Abdullin

ANALYSIS OF THE STABILITY OF THE DISCRETE STATION MODELS OF SOLOU WITH THE ACCOUNT OF LIQUID DEVELOPMENT INVESTMENTS

In this work, a modification of the model of economic dynamics of Sol-lo with discrete time is proposed. The modification consists in accounting for the lag in the development of investments by forming investments of the current period from the gross domestic product, current and previous periods. This model contains as a special case a discrete version of the Solow model. The constructed model in the specific indicators includes the nonlinear difference equation for the capital-labor ratio. Conditions are established for the parameters of the modified model, which ensure the existence of a unique non-zero stationary solution of this equation. It is analytically proved that if these conditions are satisfied, the stationary solution is attractive. The stationary solution and the specific characteristics of the modified model are less than the stationary solution and the specific characteristics of the discrete Solow model.

Key words: mathematical model, Economic dynamics, Discrete model of Solow, Structure of investments, Nonlinear difference equation, Stationary solution, Attraction of the stationary solution.

Одной из гипотез заложенной в модели экономического роста Солоу [1–3, 5] является предположение о переходе части ВВП текущего периода, в виде инвестиций, в основной капитал того же периода. Различные варианты учета запаздывания в освоении инвестиций для модели Солоу с непрерывным временем рассмотрены в ряде работ. В книге [1], В. А. Колемаев «Математическая экономика», рассмотрен подход с распределенным лагом освоения инвестиций, который задается показательным распределением. Это приводит к добавлению к стандартной модели Солоу дифференциального уравнения ввода фондов. Подход с фиксированным лагом освоения инвестиций, кусочно-постоянными запаздываниями, изучен в работе [4], П. М. Симонов «Об одном методе исследования динамических моделей макроэкономики». Такой подход приводит к дифференциальным уравнениям с запаздыванием, исследование которых связано с определенными трудностями.

В модели Солоу с дискретным временем учет запаздывания в освоении инвестиций можно осуществить за счет распределения валового внутреннего продукта (ВВП) текущего периода на конечное потребление этого же периода и инвестиции текущего и будущих периодов. Такая модификация модели экономического роста Солоу более проста для изучения, сводится к анализу нелинейного разностного уравнения для фондовооруженности, и идентификации по статистическим данным.

Рассмотрим модификацию модели Солоу с дискретным временем *t* в предположении, что на инвестиции *I(t)* года *t* расходуются части ВВП *X(t)* и *X(t-1)* текущего *t* и предыдущего *t-1* года и инвестиции *I(t)* переходят в фонды *K(t)* года *t*. Это предположение отражает задержку в освоении инвестиций. При принятых в литературе [1 – 3] обозначениях переменных и выполнении других предположений модели Солоу модифицированная модель имеет вид

$$\begin{gathered} X(t) = F(K(t), L(t)), \\ L(t) = (1+\gamma)\cdot L(t-1), L(0) = L_0, L(t) = (1+\gamma)^t \cdot L_0, \\ K(t) = (1-\mu)\cdot K(t-1) + I(t), \\ I(t) = \rho_1 X(t) + \rho_2 X(t-1), \\ C(t) = (1-\rho_1-\rho_2)X(t). \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь и далее $F(K(t), L(t))$ – линейно однородная производственная функция с положительными частными производными $\frac{\partial F}{\partial K}$ и $\frac{\partial F}{\partial L}$ и отрицательными частными производными $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2}$ и $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}$; *L(t)* – численность занятых, γ – годовой темп прироста числа занятых; μ – доля годового выбытия фондов; $\rho = \rho_1 + \rho_2$ – норма накопления в ВВП; *C(t)* – непроизводственное потребление в году *t*. Параметры $\gamma, \mu, \rho_1, \rho_2$ постоянные величины с значениями из отрезка [0;1].

Перейдем к удельным показателям: фондовооруженности $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$; ВВП на одного занятого $x(t) = \frac{X(t)}{L(t)} = F\left(\frac{K(t)}{L(t)}; 1\right) = f(k(t))$; инвестициям на одного занятого $i(t)=\frac{I(t)}{L(t)}=\rho_1 x(t)+\frac{\rho_2}{1+\gamma}x(t-1)$; потреблению на одного занятого $c(t)=\frac{C(t)}{L(t)}$. В удельных показателях модель примет вид

$$\begin{gathered}x(t)=f\big(k(t)\big),\\ k(t)=\frac{1-\mu}{1+\gamma}k(t-1)+\rho_1 f(k(t))+\frac{\rho_2}{1+\gamma}f(k(t-1)),\\ i(t)=\rho_1 f(k(t))+\frac{\rho_2}{1+\gamma}f(k(t-1)),\\ c(t)=(1-\rho_1-\rho_2)f\big(k(t)\big),\end{gathered}\tag{2}$$

где $f(0)=0, f'(k)>0, f''(k)<0$. Модель включает единственное нелинейное разностное уравнение первого порядка. Его стационарное решение $k^*=const$ находится как решение уравнения

$$\frac{\gamma+\mu}{1+\gamma}\cdot k^*=(\rho_1+\frac{\rho_2}{1+\gamma})\cdot f(k^*),\tag{3}$$

При $\rho_2=0$ из модели (2) получаем дискретную модель Солоу, с инвестициями $I(t)=\rho X(t)$, ненулевое стационарное решение $\tilde{k}$ которой определяется как решение уравнения $\frac{\gamma+\mu}{1+\gamma}\cdot\tilde{k}=\rho\cdot f(\tilde{k})$.

Утверждение. Уравнение динамики фондовооруженности в модели экономической динамики (2), с $I(t)=\rho_1 X(t)+\rho_2 X(t-1)$, при выполнении условия

$$\frac{\gamma+\mu}{(1+\gamma)\rho_1+\rho_2}<f'(0)<\frac{1}{\rho_1},\tag{4}$$

имеет единственное ненулевое стационарное решение k^*, к которому при $t\to\infty$ сходятся все его решения *k(t)* с *k(0)*≠*k**. Это стационарное решение меньше стационарного решения $\tilde{k}$ дискретной модели Солоу и удельные характеристики стационарного режима модели (2) меньше аналогичных характеристик дискретной модели Солоу.

Доказательство. Из $f(0)=0, f'(k)>0, f''(k)<0$ и условия (4) имеем $\frac{\gamma+\mu}{1+\gamma}<(\rho_1+\frac{\rho_2}{1+\gamma})f'(0)$, следовательно, уравнение (3), кроме нулевого решения, имеет единственное ненулевое решение k^* и для $k<k^*$ выполняется неравенство $\frac{\gamma+\mu}{1+\gamma}k<(\rho_1+\frac{\rho_2}{1+\gamma})f(k)$, а для $k>k^*$ неравенство $\frac{\gamma+\mu}{1+\gamma}k>\left(\rho_1+\frac{\rho_2}{1+\gamma}\right)f(k)$. Покажем, что любые решения *k(t)* разностного уравнения фондовооруженности при *t*→∞ сходятся к стационарному решению k^*, т. е. $\lim_{t\to\infty}k(t)=k^*$.

Предварительно докажем, что при начальном условии *k(0)* < *k** решение $k(t)<k^*$ для любого *t*>*0*. Рассмотрим отклонение $k(t)-k^*$ решения $k(t)$ от стационара k^*. Из уравнения для фондовооруженности и уравнения (3) получаем

$$k(t)-k^*=\frac{1-\mu}{1+\gamma}k(t-1)+\rho_1 f\big(k(t)\big)+\frac{\rho_2}{1+\gamma}f\big(k(t-1)\big)-$$
$$-\left(\frac{1-\mu}{1+\gamma}k^*+\left(\rho_1+\frac{\rho_2}{1+\gamma}\right)f(k^*)\right)=$$

$$= \frac{1-\mu}{1+\gamma}(k(t-1)-k^*) + \rho_1\Big(f\big(k(t)\big) - f(k^*)\Big) + \frac{\rho_2}{1+\gamma}\Big(f\big(k(t-1)\big) - f(k^*)\Big).$$

Применяя к разности $f\big(k(t)\big) - f(k^*)$ формулу конечных приращений Лагранжа получаем

$$\big(1-\rho_1 f'(k_c)\big)(k(t)-k^*) =$$
$$= \frac{1-\mu}{1+\gamma}(k(t-1)-k^*) + \frac{\rho_2}{1+\gamma}\Big(f\big(k(t-1)\big) - f(k^*)\Big).$$

Отсюда для $t=1$ из $k(0) < k^*$ и возрастания $f(k)$ имеем

$$\big(1-\rho_1 f'(k_c)\big)(k(1)-k^*) < 0$$

Из условия (4) и убывания $f'(k)$ получаем $(1-\rho_1 f'(k_c)) > 0$. Следовательно, $k(1) < k^*$. Проводя такие же рассуждения для $t>1$ методом математической индукции получаем $k(t) < k^*$для любого $t>0$ при $k(0)<k^*$. Для случая $k(0)>k^*$ аналогичными рассуждениями доказывается $k(t) > k^*$ для всех $t>0$.

Для приращения $\Delta k(t) = k(t) - k(t-1)$ из уравнения для фондовооруженности модели (2) получаем

$$\Delta k(t) = \frac{1-\mu}{1+\gamma}k(t-1) + \rho_1 f\big(k(t)\big) + \frac{\rho_2}{1+\gamma}f\big(k(t-1)\big) - k(t) =$$
$$= -\frac{\mu+\gamma}{1+\gamma}k(t-1) + \rho_1 f\big(k(t-1)+\Delta k(t)\big) + \frac{\rho_2}{1+\gamma}f\big(k(t-1)\big) =$$
$$= -\frac{\mu+\gamma}{1+\gamma}k(t-1) + \rho_1\Big(f\big(k(t-1)\big) + f'\big(k_p\big)\Delta k(t)\Big) + \frac{\rho_2}{1+\gamma}f\big(k(t-1)\big),$$

где k_p некоторое значение между $k(t-1)$ и $k(t)$. Отсюда следует

$$\Big(1-\rho_1 f'\big(k_p\big)\Big)\Delta k(t) = -\frac{\mu+\gamma}{1+\gamma}k(t-1) + (\rho_1 + \frac{\rho_2}{1+\gamma})f\big(k(t-1)\big).$$

При $k(0)<k^*$ для всех $t>0$ выполняется неравенство $k(t)<k^*$, следовательно, и неравенство $-\frac{\gamma+\mu}{1+\gamma}k(t-1) + \left(\rho_1 + \frac{\rho_2}{1+\gamma}\right)f\big(k(t-1)\big) > 0$. Из условия (4) и убывания $f'(k)$ имеем $1-\rho_1 f'\big(k_p\big) > 0$. Таким образом, при $k(0)<k^*$ для всех $t>0$ выполняется неравенство $\Delta k(t) = k(t) - k(t-1) > 0$ и последовательность $\{k(t)\}$ является возрастающей и ограниченной сверху k^*, следовательно, она имеет предел. Из уравнения для фондовооруженности модели (2) для нахождения предела $\lim_{t\to\infty} k(t)$ получаем уравнение

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = \frac{1-\mu}{1+\gamma}\lim_{t\to\infty} k(t) + \rho_1 f\left(\lim_{t\to\infty} k(t)\right) + \frac{\rho_2}{1+\gamma}f\left(\lim_{t\to\infty} k(t)\right),$$

которое совпадает с уравнением для стационарного решения k^*, следовательно, $\lim_{t\to\infty} k(t) = k^*$.

Для решений $k(t)$ с начальным условием $k(0)>k^*$, аналогичным образом, доказывается, что последовательность $\{k(t)\}$ убывающая и ограничена снизу k^* и предел равен k^*. Таким образом, уравнение динамики фондовооруженности в модели (2) при выполнении условия (4) имеет единственное ненулевое стационарное решение k^*, к которому при $t \to \infty$ сходятся все его решения *k(t)*.

При положительном темпе прироста числа занятых, $\gamma > 0$, из неравенства $\rho_1 + \rho_2/(1+\gamma) < \rho_1 + \rho_2 = \rho$, возрастания и вогнутости *f(k)* и уравнений для стационарных решений вытекает $k^* < \tilde{k}$. Следовательно, в стационарном режиме все удельные характеристики, определяемые моделью (2), меньше соответствующих характеристик дискретной модели Солоу с $I(t) = \rho X(t)$. При отрицательном темпе прироста занятых, $\gamma < 0$, имеет место обратное: $k^* > \tilde{k}$ и все удельные характеристики, определяемые моделью (2), больше соответствующих характеристик дискретной модели Солоу.

Список использованной литературы

1. Колемаев В. А. Математическая экономика : учебник / В. А. Колемаев. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. – 401 с.

2. Лебедев В. В. Математическое моделирование нестационарных экономических процессов / В. В. Лебедев, К. В. Лебедев. – М. : Изд-во ООО «еТест», 2011. – 336 с.

3. Ромер Д. Высшая макроэкономика : учебник ; пер. с англ. / Д. Ромер. – М. : Изд. дом Высш. шк. экономики, 2014. – 855 с.

4. Симонов П. М. Об одном методе исследования динамических моделей макроэкономики / П. М. Симонов // Вестник Пермского университета. Сер. Экономика. – 2014. – Вып. 1. – С. 14–27.

5. Solow R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth / R. M. Solow // The Quarterly Journal of Economics. – 1956. – February Vol. 70, No. 1. – P. 65–94.

Информация об авторах

Абдуллин Владимир Рафаэлевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и эконометрики, Байкальский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: abdullin.vladimir@rambler.ru.

Абдуллин Рафаэль Зинатович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и эконометрики, Байкальский государственный университет, 664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11, e-mail: abdullin-rz@isea.ru.

Authors

Abdullin Vladimir Rafaelevich – Ph.D., Associate Professor of the Department of Mathematics and Econometrics, Baikal State University, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: abdullin.vladimir@rambler.ru.

Abdullin Rafael Zinatovich – Ph.D., Associate Professor of the Department of Mathematics and Econometrics, Baikal State University, 11 Lenin St., 664003, Irkutsk, Russian Federation, e-mail: abdullin-rz@isea.ru.